I Krive u prostoru

1 Krive u prostoru i putevi

Kriva L u trodimenzionalnom euklidskom prostoru se može prikazati parametarski u skalarnom ili vektorskom obliku:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases} \qquad L: \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$$

gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

1. Pokazati da kriva L: $x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$, leži na nekoj sferi sa centrom $C(0; \frac{1}{2}; 0)$.

$[x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = R^2]$

2. Pokazati da kriva L: $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos t$, $(a, b, c > 0)$, leži na nekom elipsoidu. $[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1]$

3. Date su jednačine krive u prostoru u vektorskom obliku

(a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}$;

(b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$;

(c) $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$;

Utvrditi o kojima krivima je riječ. $[(a)$ parabola; (b) prava; (c) elipsa$]$

4. Pokazati da kriva

$$L: \begin{cases} x = \sin 2\varphi \\ y = 1 - \cos 2\varphi \\ z = 2\cos\varphi \end{cases}$$

leži na sferi. $[x^2 + y^2 + z^2 = 4]$

Kriva L može još biti zadata i na sljedeće načine: u eksplicitnom ili implicitnom obliku

$$L: \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \text{ gdje je } x \in I \text{ (eksplicitni oblik);} \qquad L: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ (implicitni oblik)}$$

5. Kriva L je data kao presjek dvije površi

$$L: \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Krivu L napisati u parametarskom obliku.

$[x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t; y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t; z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t; t \in [0, 2\pi)]$

6. Odrediti projekciju krive L: $z = x^2 - y^2$, $x + y - z = 0$ na ravan xOy.

$[x + y = 0; z = 0 \quad \text{i} \quad x - y - 1 = 0; z = 0]$

7. Odrediti projekciju krive L: $x = y^2 + z^2$, $x - 2y + 4z - 4 = 0$ na ravan yOz.
[$(y-1)^2 + (z-2)^2 = 3; x = 0$]

8. Data je kriva

$$L : x = a\cos^2 u,\ y = a\sin u\cos u,\ z = a\sin u$$

Pokazati da kriva L leži u presjeku jedne lopte i cilindra čija je generatrisa paralelna osi $0z$ i odrediti jednačine tih površi. [$L : x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 = ax$]

9. Pokazati da je kriva $\vec{r} = \sin 2t\vec{i} + (1-\cos 2t)\vec{j} + 2\cos t\vec{k}$ presjek paraboličkog i kružnog valjka (cilindra). [$x^2 + (y-1)^2 = 1; y = -\frac{1}{2}z^2 + 2$]

10. Data je kriva linija

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \ \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori})$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti.
[$A(x-c_1) - B(y-c_2) + C(z-c_3) = 0$ gdje su $A = a_2b_3 - a_3b_2$,...]

11. Data je kriva linija

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \ \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori})$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti. Utvrditi o kojoj je krivoj riječ.
[parabola, za slučaj kada vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni]

12. Kriva je određena kao presjek sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i cilindra

$$x^2 + y^2 = ax$$

Pokazati da je projekcija krive na xOz-ravan dio parabole. Napisati jednačinu krive u parametarskom obliku.
[$x = -\frac{1}{a}z^2 + a$; $C : x = a\cos^2 t, y = a\sin t\cos t, z = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$]

Neka je $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

vektor-vrijednostna funkcija, neprekidna na kompaktnom intervalu $[a,b]$ u $\mathbb{R}$. Kako t uzima vrijednosti iz intervala $[a,b]$ to vrijednost funkcije $\vec{f}$ ostavljaju trag kao skup tački u $\mathbb{R}^3$ koje zovemo graf funkcije $\vec{f}$ ili kriva opisana sa $\vec{f}$. Kriva je kompaktan i povezan podskup od $\mathbb{R}^3$ zato što je neprekidna slika kompaktnog intervala. Samu funkciju $\vec{f}$ nekad zovemo put.

Često je korisno da zamislimo krivu kao trag čestice koja se pomjera. Interval $[a,b]$ tada možemo tumačiti kao vremenski interval a vektor $\vec{f}(t)$ kao određena pozicija čestice u prostoru u datom trenutku t. Ako prihvatimo ovo tumačenje, funkciju $\vec{f}$ često zovemo kretanje.

Različiti putevi mogu ostavljati iste krive. Npr. dvije kompleksno vrijednosne funkcije $f(t) = e^{2\pi i t}$, $g(t) = e^{-2\pi i t}$ za $0 \le t \le 1$, kao trag ostavljaju jedinični krug $x^2 + y^2 = 1$, ali ove tačke su posjećene u obrnutom smjeru. Isti krug se nacrta pet puta uz pomoć funkcije $h(t) = e^{10\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

13. Objasniti na konkretnom primjeru kako bi ovo shvatanje krivih linija i puteva u prostoru mogli iskoristiti u programiranju. [animiranje kretnji, reklame,...]